目　录

在微积分出现后不久，人们就开始用偏微分方程来研究力学和物理学中出现的问题. 从那时候起，偏微分方程理论一直是数学家、力学家和物理学家所共同研究的重要对象. 人们一方面把力量集中在其他科学最感兴趣的那些偏微分方程问题上;另一方面,也力求发展偏微分方程的一般理论. 随着科学的发展，偏微分方程中感兴趣的问题越来越多,越来越难,解决的方法也越来越进步. 在企图建立一般性理论时,数学家发现,偏微分方程是十分复杂的对象. 即使是线性的方程，也可以复杂到很难处理的程度. 至于非线性方程,人们更加感到,目前大体上还只能分别针对各种问题,提出各别的解决办法;而在这个过程中又不断创立新方法，发现新现象和提出新问题.

本书拟对偏微分方程这门学科作一最概略的介绍，希望读者能从中知道一些关于偏微分方程的最基本的知识，并了解某些当前人们所关注的问题. 由于涉及的对象很广泛,使用方法又很多样,这里只能作些简述；在取材上,也带有难以避免的主观性.

本书中，我们将不论述有关偏微分方程的数值解法和渐近求解的问题. 这些内容是很重要的，需要另作专

门而系统的论述.

一、典型的数学物理方程

一个物理的量，往往是空间位置(x,y,z)和时间t的函数. 例如，一个区域中温度的分布和变化，就可以用

$$u=u(t,x,y,z) \tag{1}$$

来表示. 有了这个函数，就能知道区域中各点在各个时刻的温度.

许多物理规律往往能够表示为一些物理量及其偏导数之间的等式关系. 例如，在物体内部不具有热源的情况下，它的温度分布应该满足

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),(\text{其中 } a>0) \tag{2}$$

这里$a^2=\dfrac{k}{Q}$，k是传热系数，Q是热容量.

象(2)这种形式的方程，即由未知函数及其偏导数的等式所构成的方程，称为**偏微分方程**.

物理学中出现了许多偏微分方程. 例如，当声波在空气中传播时，如果u表示压强的小扰动，那末u就满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),(\text{其中 } a>0) \tag{3}$$

这里a是声音在空气中的传播速度. 又如，当物体处于热稳定状态时(也就是说，它的温度处于不随时间而改变

的状态)，那末温度 u 就满足方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{4}$$

上面介绍的(2)、(3)、(4)，是三个最典型的偏微分方程，其中的每一个方程都可以代表许多种物理现象.(2)称为**热传导方程**，因为它来自传热现象；溶解物在溶液中的密度 $u(t,x,y,z)$ 也同样地满足(2)，所以(2)又称为**扩散方程**. 方程(3)不仅可以用来表示声波，也可以用来表示电磁波或其它的波动，一般称为**波动方程**. 方程(4)称为**拉普拉斯**(P. S. M. de Laplace)**方程**，或称为**调和方程**，它除了表示热的平衡外，也可以用来表示真空中静止的电磁场，经典的引力场，或流体的某种稳态的流动，等等.

(2)、(3)和(4)是物理学中最早出现的偏微分方程，对这三种方程的求解，能够解释许多物理现象，有重要应用. 所以，18 世纪以来，这些方程就成为重要的研究对象. 它们被认为是典型的数学物理方程. 下面就从如何求解这些典型的偏微分方程谈起.

二、初始值问题

对于波动方程，最典型的求解问题是**初始值问题**，或称**柯西**(A. L. Cauchy)问题. 这就是：求波动方程(3)的解 u，使得它满足

$$u(0,x,y,z)=u_0(x,y,z),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z)=u_1(x,y,z). \tag{5}$$

(5)称为**初始条件**,其中的 $u_0(x,y,z)$、$u_1(x,y,z)$是已给的函数,它们分别表示在时刻 $t=0$ 时波的形状和关于 t 的变化率.

如果 u 和 y、z 无关,也就是说只有两个自变数(t,x)的情形,方程(3)化为**弦振动方程**(这是讨论紧张着的弦的横振动而产生的方程):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0; \tag{6}$$

初始条件(5)化为

$$u(0,x)=u_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=u_1(x). \tag{7}$$

对于弦振动方程,我们可以写出它的通解

$$u=f(x-at)+g(x+at), \tag{8}$$

这里 f 和 g 是两个任意函数,但要求它们有二阶连续的导数.(8)的推导是很初等的,只须作变换

$$\xi=x-at、\quad \eta=x+at, \tag{9}$$

方程(6)就化为$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$,它的通解就取形式 $u=f(\xi)+g(\eta)$,此即(8)式.(8)式的意义是:弦的横振动是由一个向右传的波 $f(x-at)$ 和一个向左传的波 $g(x+at)$迭加而成.$f(x-at)$之所以称为向右传的波,是因为:$u=f(x-at)$当 t 取不同值时,u的波形总是一样的,但以速度 a 向右推移.向左传的波的意义和此类同.

利用初始条件(7),可以把(8)中的 f、g 决定出来,从

而得到求解弦振动方程的达朗贝尔 (J. L. R. D'Alembert)公式：

$$u=\frac{u_0(x-at)+u_0(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}u_1(\tau)d\tau. \tag{10}$$

这就完全解决了弦振动方程的初始值问题.

在非一维的情形,问题要复杂得多. 这时,可以利用傅里叶(J. B. J. Fourier)变换. 我们把(x,y,z)记为$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$，又记$\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，函数$f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,x_3)$的傅里叶变换，是利用下述公式由$f(\boldsymbol{x})$而得到$\xi$的函数$\hat{f}(\xi)$:

$$\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,x_3)e^{-i\xi\cdot x}dx_1dx_2dx_3, \tag{11}$$

式中$\xi\cdot\boldsymbol{x}=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3$；当$f(x_1,x_2,x_3)$是具有连续导数(到某一阶为止)的函数，且$f$及其导数当$x\to\infty$时相当快地趋向于零时，$\hat{f}(\xi)$不仅有意义，而且$f(\boldsymbol{x})$也可以利用$\hat{f}(\xi)$重新再现出来，即

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)e^{i\xi\cdot x}d\xi_1d\xi_2d\xi_3. \tag{12}$$

(12)称为傅里叶逆变换. 另外，我们还有

$$-i\xi_i\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2,x_3)e^{i\xi x}dx_1dx_2dx_3 \quad (i=1,2,3) \tag{13}$$

等公式，它表明求导运算在傅里叶变换后成为乘法的运算.

对于我们所说的那种具有良好性质的函数，(12)、(13)是容易直接验证的.

用傅里叶变换求解波动方程初始值问题的基本思想

是

i. 对方程(3)的初始条件(5)，关于变数(x,y,z)(也记为(x_1,x_2,x_3))作傅里叶变换，从而(利用性质(13))得到含参数ξ的关于t的常微分方程的初始值问题：

$$\frac{d^2\hat{u}}{dt^2}=-a^2(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)\hat{u}, \tag{14}$$

$$\hat{u}|_{t=0}=\hat{u}_0(\xi),\quad \left.\frac{d\hat{u}}{dt}\right|_{t=0}=\hat{u}_1(\xi). \tag{15}$$

ii. 解常微分方程的初始值问题(14)、(15)，从而得出

$$\hat{u}(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\hat{u}_0(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\cos(a|\xi|t)+\hat{u}_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}, \tag{16}$$

这里$|\xi|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$.

iii. 作$\hat{u}(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$的傅里叶逆变换，得出所求的解$u(t,x_1,x_2,x_3)$. 这一步需要作复杂的运算(具体运算过程这里从略，读者可参看有关的著作，如[1]). 其结果是

$$\begin{aligned}u(t,x)&=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4\pi a}\int_{|l|=1}atu_0(x+atl)dS_1\right\}\\&\quad+\frac{1}{4\pi a}\int_{|l|=1}atu_1(x+atl)ds_1\\&=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4\pi a^2t}\int_{|l|=1}u_0(x+l)dS_{at}\right\}\\&\quad+\frac{1}{4\pi a^2t}\int_{|l|=at}u_1(x+l)ds_{at}.\end{aligned} \tag{17}$$

这便是解波动方程初始值问题的“泊松(S. D. B.

Poisson) 公式", 式中 l 是用向量表示的积分变量. dS_1 (dS_{at})是球面$|l|=1$($|l|=at$)的面积元素. 特别, 在最后的表达式中, 积分是在沿以 $\boldsymbol{x}$ 为中心, at 为半径的球面(在初始平面上)处进行的.

从公式可看出,如果u_0具有直到 3 阶的连续导数,u_1具有直到 2 阶的连续导数,那么,所得到的 $u(t,\boldsymbol{x})$ 具有直到 2 阶的连续导数, 并且, 确满足方程 (3) 和初始条件(5).

这种方法的基本思想,可图示如下:

$t=t$　　　解 $u(t,x)$ ←(傅里叶逆变换)— $\hat{u}(t,\xi)$

　　　　　　　↑ (虚线)　　　　　　　↑ 解常微分方程

$t=0$　　　初始条件 u_0,u_1 —(傅里叶变换)→ 初始条件 $\hat{u}_0,\hat{u}_1$

对于热传导方程(2),也可用同样的方法得出初始值问题的解的表达式,但此时初始条件只有一个,即 $t=0$时的温度

$$u(0,\boldsymbol{x})=u_0(\boldsymbol{x}); \tag{18}$$

解的表达式是

$$u(t,\boldsymbol{x})=\frac{1}{2a(\sqrt{\pi t})^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}_0(\boldsymbol{\xi})e^{-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})^2}{4a^2t}}d\xi_1d\xi_2d\xi_3, \tag{19}$$

式中$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})^2=(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2$.

可以验证, 只要 $u_0(\boldsymbol{x})$是有界的连续函数, $u(t,\boldsymbol{x})$ 在 $t>0$ 就满足热传导方程, 而且当 $t\to 0$ 时以 $u_0(x)$ 为极限.

(19)中出现的函数

$$k(x,\xi,t)=\frac{1}{2a(\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \tag{20}$$

称为热核．在数学物理、概率论和其他许多数学问题中，都有重要应用．

三、初边值问题

我们来考虑有限物体的温度分布．设该物体占据3维空间的一个有界区域 Ω，它的边界 $\partial\Omega$ 有一定的光滑性，物体所处的环境肯定会对物体的温度分布产生影响．如果物体表面上的温度是已给的，即

$$u(t,x)|_{x\in\partial\Omega}=g(t,x),\ (x\in\partial\Omega) \tag{21}$$

这里 $g(t,x)$当 $t\geqslant 0$、$x\in\partial\Omega$ 时有意义．那末，我们就得求在$[0,\infty)\times\Omega$(即$t\in[0,\infty)$，$x\in\Omega$)上所定义的 $u(t,x)$，使它能满足方程(2)、初始条件(18)、以及在边界上出现的边界条件(21)．求解这样的既有初始条件又有边界条件的偏微分方程的问题，称为**初边值问题**．

当我们考虑只有一个空间变量的情形，即 u 和 y、z 无关．如考察一根细棒的温度分布，假定棒周围(不包括两端)处于绝热状态，我们就有方程和初边值条件如下：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0, \tag{22}$$

$$u(t,0)=g_1(t)、\quad u(t,l)=g_2(t), \tag{23}$$

$$u(0,x)=u_0(x). \quad (0\leqslant x\leqslant l) \tag{24}$$

我们暂时假设 $g_1(t)=g_2(t)=0$ 来解这一问题.

求解的步骤是：

i. 作一些形为 $u(t,x)=T(t)X(x)$的解，它能满足方程(22)和边界条件 $u(t,0)=u(t,l)=0$. 为此，把 $u=T(t)X(x)$代入方程(22),我们就得到

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda, \tag{25}$$

这里 λ 必须是一个常数. 解方程

$$X''-\lambda X=0, \tag{26}$$

考虑到边界条件 $X(0)=X(l)=0$,这个解必须是

$$X_k(x)=a_k\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad (\lambda=-k^2, k=1,2,\cdots) \tag{27}$$

这里 a_k 是任意常数. 再解 $T(t)$,从而得到所需的特解

$$u_k(t,x)=a_k e^{-k^2a^2t}\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{28}$$

ii. 由于方程是线性齐次的，存在着迭加原理(即解的常系数线性组合仍然是解). 我们希望选取适当的 a_k，使

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-k^2a^2t}\sin\frac{k\pi}{l}x \tag{29}$$

是所求的解. 和初始条件(24)相比较,可见

$$u(0,x)=u_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

因而 a_k 必须取 $u_0(x)$关于 $[0, l]$ 中的完备正交函数系 $\left\{\sin\frac{k\pi}{l}x\right\}$的傅里叶系数,即取

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\frac{k\pi}{l}x dx \tag{30}$$

就可以了.

若 $u_0(x)$是连续函数,$u_0(0)=u_0(l)=0$(在边界上初始条件和边界条件相容),那末可以验证所求得的表达式确是所需要的解. 它可以形式地表达为

$$u(t,x)=\int_0^l k_l(t,x,\xi)\, u_0(\xi)d\xi, \tag{31}$$

而

$$k_l(t,x,\xi)=\frac{2}{l}\sum_k e^{-k^2a^2t}\sin\frac{kx}{l}\sin\frac{k\xi}{l}. \tag{32}$$

如果边界条件不是 0,可以将未知函数作变换,使边界条件为 0,而方程化为非齐次的,

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x). \tag{33}$$

这时解 $u=u_1+u_2$,其中 u_1 满足齐次方程、原边界条件和初始条件;而 u_2 满足非齐次方程、零边界条件和零初始条件. u_1 已经求得,u_2 可以有它的表示式

$$u_2(t,x)=\int_0^t\int_0^l k_l(t-\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi\, d\tau=\int_0^t u_\tau(t-\tau,x)d\tau, \tag{34}$$

式中的 $u_\tau(t-\tau,x)$是热传导方程(齐次)在 $[\tau,\infty)\times[0,l]$ 的解($\tau\geqslant 0$),在 $x=0$、l 时满足零边界条件,在 $t=\tau$ 时满足初始条件 $u(\tau,x)=f(\tau,x)$. (34)确满足(33),这是可以直接验证的. 这种利用齐次方程的解来作出非齐次方程的解的方法,称为**杜哈默尔(M. J. Duhamel)原理**,它也适用于波动方程以及其他更复杂的方程.

以上的求解初边值问题的方法，称为**分离变量法**，或称为**傅里叶方法**，这是法国数学家傅里叶提出来的，它促成了傅里叶级数和傅里叶积分理论的成长，对数学及其在各个领域中的应用产生了重要的作用.

对于有三个自变数的情形，也可以运用分离变量法. 这时我们要写出 $u=T(t)X(x)$，这里 $X(x)$ 是定义在区域 Ω 的函数，且应满足边界条件

$$X(x)\big|_{x\in\partial\Omega}=0. \tag{35}$$

此外，$X(0)$ 应该满足

$$\Delta X=\lambda X. \tag{36}$$

于是，问题归结于求(36)在(35)条件下的非零解问题. 和一个自变量的情形相类似，这只能对一些特殊的 λ 值(称为特征值) 有非零解(称为特征函数). 在解出了这种特征值问题后，我们也可照样建立起初边值问题的解的表达式.

求解拉普拉斯算子的特征值问题，是数学上的一个重要问题. 对于某些特殊区域(如球，圆柱体)，相应问题可以利用特殊函数显式地解出.

对于热传导方程，除(21)之外，还可以依不同的物理条件提供其他类型的边界条件，例如

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x\in\partial\Omega}=g(t,x), \tag{37}$$

和

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)_{x\in\partial\Omega}=g(t,x), \tag{38}$$

这里$\frac{\partial}{\partial n}$是关于 $\partial\Omega$ 的外法线导数，σ 是定义在 $\partial\Omega$ 上的非负函数，它们所相应的初边值问题也可以利用和上面相应的办法求解.（21)称为**第一类边界条件，或狄利克雷**(P. G. Dirichlet)式边界条件;(37)称为**第二类边界条件**，或诺依曼(G. Neumann)式边界条件；(38)称为**第三类边界条件**，或罗宾(Robin)式边界条件.

对于弦振动方程，也可以同样地提出初边值问题.但这时初始条件有两个，而函数 $T(t)$应满足的方程是二阶的：

$$T''+k^2a^2T=0. \tag{39}$$

这时，解的表达式是

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{40}$$

其中

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{2}{l}\int_0^l u_0(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi,\\ b_k&=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l u_1(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi.\end{aligned} \tag{41}$$

利用傅里叶级数的性质，可以看到，如果$u_0(x)\in C^3$，$u_1(x)\in C^2$，

$$u_0(0)=u_0(l)=u_0''(0)=u_0''(l)=u_1(0)=u_1(l)=0, \tag{42}$$

所求出的u确是问题的解.（42)实际上是初始条件和边界条件的一种相容性.

对于波动方程，也可以参照热传导方程的作法，而把初边值问题归结到拉普拉斯算子的特征值问题.

四、拉普拉斯方程的边值问题

如果考虑在一定边界条件(和 t 无关)下物体温度的稳态分布问题,就要考虑在边界条件

$$u|_{x\in\partial\Omega}=g(x)\quad(x\in\partial\Omega) \tag{43}$$

下求解拉普拉斯方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0. \tag{44}$$

这种问题称为**狄利克雷问题**(相应地,也有**诺依曼问题**和**罗宾问题**).

先讨论两个自变数(x, y)的情形,并先对单位圆求解狄利克雷问题. 利用极坐标(r,θ),拉普拉斯方程可写为

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0, \tag{45}$$

边界条件为

$$u(1,\theta)=g(\theta). \tag{46}$$

仍利用分离变量法,置

$$u=R(r)\Theta(\theta), \tag{47}$$

从而得到

$$\Theta''+\lambda\Theta=0, \tag{48}$$

$$r^2R''+rR'-\lambda R=0. \tag{49}$$

Θ 关于 θ 应是以 2π 为周期的函数,所以只能有

$$\lambda = k^2, \quad (k = 0, 1, \cdots, n, \cdots) \tag{50}$$

相应的特征函数是

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= \frac{1}{2}a_0, \\ \Theta_k &= a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta. \end{aligned} \tag{51}$$

以(50)代入(49)，所得的线性方程是容易解出的．为使解在原点正则，我们取

$$R_k = r^k, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, r, \cdots) \tag{52}$$

因而解的表达式为

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \tag{53}$$

考虑到边界条件，a_0、a_1、b_1、$\cdots$应是$g(\theta)$的傅里叶系数：

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin n\varphi d\varphi. \end{aligned} \tag{54}$$

代入(53)式，经计算后，得到圆的狄利克雷问题的泊松公式

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)} d\varphi. \tag{55}$$

可以验证，当 $g(\varphi)$ 是连续函数时，$u(r,\theta)$ 在单位圆盘 $r \leqslant 1$ 上连续，在单位圆内解析，且满足拉普拉斯方程．

在平面上，我们注意到 u 满足拉普拉斯方程的充要条件是：它是复变数 $x + iy$ 的解析函数的实部（或虚部）；据此，可以利用复变函数来讨论平面上的拉普拉斯方程．例如，可以利用各种解析函数，写出许多特解来．特别，我们知道，如 $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$是 z 的解

析函数，又 $z=f(\xi)=f(\sigma+i\tau)$ 是解析函数，并把它写成

$$x=x(\sigma,\tau),\quad y=y(\sigma,\tau), \tag{56}$$

那末 $u(x(\sigma,\tau),y(\sigma,\tau))$ 是解析函数 $w(z(\zeta))$ 的实部，因此关于 (σ,τ) 也是调和的．所以，平面上的调和函数在共形映照(56)下仍然成为调和函数．这样，如果求解平面上一个单连通区域的狄利克雷问题，可以利用共形映照的黎曼定理，把它化成单位圆上的狄利克雷问题而得到解决．因而，利用复变函数可以解决许多实际问题．

求解空间拉普拉斯方程的狄利克雷问题，并没有复变函数理论可以使用．但我们现在已有很多种方法来解决这一问题．在许多时候，有奇性的特解起很大的作用．比如说

$$\frac{1}{r(x,x')}=\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2}}, \tag{57}$$

如把它看成 x 的函数，在 $x\neq x'$ 时，它就是拉普拉斯方程的一个解，而 $x=x'$ 时却有这个函数的奇性出现．设 Ω 是某一有界区域，作积分

$$u(x)=\int_\Omega \frac{f(x')}{r(x,x')}dv_{x'}, \tag{58}$$

其中 $f(x')$ 是在区域 Ω 中的满足霍尔德(O. Hölder)条件的函数，即满足

$$|f(x')-f(x)|\leqslant c|x'-x|^\alpha,$$

其中 α 是不大于 1 的正实数．那末，可以证明：在 Ω 中，$u(x)$ 满足

$$\Delta u(x)=-4\pi f(x). \tag{59}$$

(59)称为泊松方程. 所以,积分(58),得出泊松方程的一解,而在区域 Ω 外,成立

$$\Delta u=0, \tag{60}$$

即得出拉普拉斯方程的解. Ω 也可以是无界区域,但这时对 $f(x)$要添加一些要求,使积分(58)仍然有意义.

(58)的物理意义是静电(或质量)的分布 $f(x)$所产生的静电势(引力势).

对特殊区域,如单位球,它的狄利克雷问题的解也有显式的表示:对球面坐标为(ρ,θ,φ)的点,

$$u(\rho,\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1} f(\theta_0,\varphi_0)\frac{1-\rho^2}{(1+\rho^2-2\rho\cos\gamma)^{3/2}}dS_1, \tag{61}$$

这里(θ_0,φ_0)是积分的变元,是球面坐标,积分在单位球面上进行,$\cos\gamma$ 是方向(θ,φ)和方向(θ_0,φ_0)交角的余弦. 当 $f(\theta_0,\varphi_0)$连续时,$u(\rho,\theta,\varphi)$在球内满足 $\Delta u=0$,到边界连续,边界值为

$$u(1,\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi). \tag{62}$$

对于一般区域的狄利克雷问题,其解法可参阅有关的专著,如[2].

五、唯一性和适定性

我们讨论了一系列的求解问题,得出了解的公式.在得出公式时,有时我们只是证明这公式将提供一个解,而

未必能说明这个解就是唯一的解．对于数学物理中的问题来说，如果解没有唯一性，那末问题的想法就不够完备，因为我们不知道如何从中选取合用的解．因此，对于一个偏微分方程的求解问题，往往还要考虑它的唯一性．

对波动方程的初始值问题，它的唯一性可以从能量估计得出．设(t^0, x^0)是 4 维时空中的一点 $(t^0>0)$，锥面

$$(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+(x_3-x_3^0)^2=a^2(t-t^0)^2 \tag{63}$$

称为“以(t^0, x^0)为顶点的特征锥面”．用 $t=0$ 和 $t=t_1$截这个特征锥面，得到锥台 Ω_{t_1}，其上底记为 S_{t_1}，下底记为 S_0．这里 $0<t_1<t^0$．如果 u 满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)=0, \tag{64}$$

乘以$\frac{\partial u}{\partial t}$，我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\sum_{i=1}^{3}a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right\}-a^2\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\right\}=0. \tag{65}$$

在 Ω_{t_1} 上积分此式，再把它化为上底、下底和侧面的积分．可以验证，在侧面上的积分$\geqslant 0$(它表示在 Ω_{t_1} 的侧面上能量是外流的)，所以成立

$$\int_{S_{t_1}}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right\}dx_1dx_2dx_3$$
$$\leqslant\int_{S_0}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}dx_1dx_2dx_3. \tag{66}$$

这个式子称为**能量不等式**，它的物理意义是在$t=t_1$时 S_{t_1}上的波动总能量不超过 $t=0$ 时 S_0 上的总能量．

若波动方程的初始值问题有两个解 $u^{(1)}$ 和 $u^{(2)}$，令 $u=u^{(1)}-u^{(2)}$，那末，在 $t=0$ 时 $u=0$，依(66)就有 S_{t_1} 上 $\frac{\partial u}{\partial t}=0, \frac{\partial u}{\partial x_i}=0$. 但 t_1 是任意的，所以整个 Ω_{t_1} 上 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$，$\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$，因而在 Ω_{t_1} 上 u 是常数. 但 $t=0$ 时 $u=0$，所以在 Ω_{t_1} 上 $u=0$ $(0\leqslant t_1<t^0)$. 因为 (t^0, x^0) 是任意的，所以处处有 $u=0$，即 $u^{(1)}=u^{(2)}$. 这就证明了解的唯一性. 假定 $x\to\infty$ 时 u 的导数较快地 $\to 0$，由(65)得

$$\int_{t=t}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right\}dx_1dx_2dx_3$$
$$=\int_{t=0}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}dx_1dx_2dx_3, \qquad (67)$$

这就是能量守恒原理. 这里，积分是在 $(x_1, x_2, x_3)\in\mathbf{R}^3$ 中进行的，我们假定 $t=0$ 时右边的积分是有限的.

用能量原理，同样可证明初边值问题解的唯一性. 这种唯一性的证明的物理来源，是能量的守恒.

对拉普拉斯方程的狄利克雷问题，下面用另外的方法证明它的解的唯一性.

为此，先证明调和函数的平均值定理：设 u 在一点 x_0 附近调和，则

$$u(x_0)=\frac{1}{4\pi\rho^2}\int_{|x-x_0|=\rho}u(x)dS, \qquad (68)$$

式中的积分是在以 x_0 为中心的球面上进行的，这里 ρ 充分小，使得 u 在 $S\rho$ 所包围的区域中是调和的.

设 v 是任一二次连续可微的函数，则成立

$$0=v\Delta u=\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}-u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)-u\Delta v. \tag{69}$$

今不妨设 x_0 为原点，取 $v=1$，在 $S\rho$ 所包围的球体上积分，并把它化为面积分，我们得到

$$0=\int_{S\rho}\frac{\partial u}{\partial r}dS. \tag{70}$$

再在(69)中取 $v=\frac{1}{r}$，当 $x\neq 0$ 时成立

$$0=\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial x_i}-u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_i}\right).$$

把此式在 $S\rho$ 和 $S\rho_1$ 所围成的区域中积分 $(0<\rho_1<\rho)$，并把体积分化为面积分，又利用(70)式，我们就有

$$\frac{1}{4\pi\rho_1^2}\int_{S\rho_1}u\,dS=\frac{1}{4\pi\rho^2}\int_{S\rho}u\,dS.$$

令 $\rho_1\to 0$，就得到所要证明的平均值定理.

从平均值定理，可以推出如下的极值原理：如果函数 u 在区域 Ω 内调和，u在 Ω内部取到极大值(极小值)，那末 u 必须是常数. 这是因为：如果 u 在内部某一点 x_0 取到极大值，假定它在 x_0 周围不是常数，对某一 $S\rho$，其上必有 $u\leqslant u(x_0)$，且必有点 x，使 $u(x)<u(x_0)$，这样 $\frac{1}{2\pi\rho^2}\int_{S\rho}u(x)dS$ 就会小于 $u(x_0)$，这和平均值定理矛盾. 所以，在 x_0 的一个邻域，u 必须为常数，只要 $S\rho$ 在 Ω 之内. 如果 x' 是 Ω 中任意一点，把 x' 和 x 用一根曲线 C 相联结，必存在一个数 ρ_1，使得在曲线 C 上的每点为心、以 ρ_1 为半径作球面，此球面必落在 Ω 内. 现以

x_0为心，ρ_1 为半径作 $S\rho_1$，记 x_1 为 $C\cap S\rho_1$ 的一个交点，那末必须有 $u(x_1)=u(x_0)$，同样可以作 $x_2, x_3, \cdots\cdots$，从而能证明 $u(x')=u(x_0)$，因而 $u(x)$必须为常数.

现设有界闭区域 Ω 的狄利克雷问题有两个解 $u^{(1)}$和 $u^{(2)}$，那末$\boldsymbol{u}=u^{(1)}-u^{(2)}$在 Ω内也是调和函数，而且 u 在边界上取值为 0. 如果 u 不是 0，它的最大值和最小值至少有一个不是 0，而且是在内部取到，但这时 u 必须是常数，由于 u 连续，这个常数又必须是 0，这就发生矛盾，因而唯一性证毕.

极大值原理也可以有它的物理解释：如果以 $\boldsymbol{u}$ 表示物体 Ω 上的温度的稳定分布，如果在物体内部温度不是常数，且有一温度最高的点，那末这点的热量便会向周围流去，物体不可能保持稳定的温度分布.

对于热传导方程，也有类似的极值原理．以具有自变数(t,x)的齐次方程为例，对在 $0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant t\leqslant T$ 中热传导方程的解(到边界上连续)，其极大值(和极小值)必须在这矩形的底或侧边上取到．可以从热的传播性质而作这样的设想，其数学证明可参看有关的教科书[1]．利用这极值原理，照样可证明解的唯一性．因对同一初边值问题，如有两个不同的解，那末其差在矩形的底面和两侧必为零，因而它的极大值和极小值均为零，所以它本身必须为零，即解为唯一.

对连续有界的初始条件，热传导方程初始值问题的有界解是唯一的，如果除去有界性这一条件，唯一性并不能保持，见[3].

迄今为止所叙述的那些定解问题，都有解的存在性、唯一性．此外，由解的各种表达方式可见，如初始条件或边界条件（有时要求它的某些导数）作微小的变动时，解的变动也是微小的，这称为“解对于定解条件的连续依赖性”，满足这三个性质的定解问题称为**适定的定解问题**．

对有些定解问题，虽然解也存在且唯一，但并不满足对定解条件的连续依赖性．例如对拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

作初始值问题，其初始条件是

$$u(x,0)=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=\frac{1}{n^k}\sin nx,$$

它具有唯一的解

$$u_n(x,y)=\frac{1}{n^{k+1}}\sin nx\,\mathrm{sh}\,ny.$$

$k>0$ 时，当 $n\to\infty$时初始条件趋向于零；但对$y>0$的点，例如 $x=\frac{\pi}{2}$，选 n 为 $4h+1$，当 $h\to\infty$ 时子序列$\{u_{4h+1}\}$在(x,y) 点会趋于∞，所以解并不连续地依赖于初始条件，这一类问题，称为**不适定问题**．人们原来认为数学物理中的问题必须是适定的，但现在看法有了改变，不少有意义的应用问题（如探矿中的问题），就是不适定问题．

六、线性偏微分方程的分型研究

在对各个线性方程分别研究的基础上，逐步形成了线性方程的分型理论和一般理论.

在表述线性方程时，常用下述记号：用$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表独立变数. 用$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$表复合指标，其中$\alpha_1$、$\cdots$、$\alpha_n$均非负整数，$|\boldsymbol{\alpha}|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$；记$D_j=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$，$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}$. 线性偏微分方程的一般写法是

$$Lu=\sum_{|\alpha|\le p}A_\alpha(\boldsymbol{x})D^\alpha u=f, \tag{71}$$

式中$\sum$是关于满足$|\boldsymbol{\alpha}|\le p$的一切$\boldsymbol{\alpha}$作和，$A_\alpha(\boldsymbol{x})$是$\boldsymbol{x}$的的已知函数，$u$是未知函数，$f$是已知函数. 式中出现的未知函数的导数最高阶数是$m$阶，这个方程就称为$\boldsymbol{m}$**阶的**，而

$$L=\sum_{|\alpha|\le p}A_\alpha(\boldsymbol{x})D^\alpha \tag{72}$$

就称为$\boldsymbol{m}$**阶线性微分算子**. 对应独立变数$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，有它的对偶变数$\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，又记$\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$，我们称

$$\sigma_L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\sum_{|\alpha|=p}A_\alpha(\boldsymbol{x})\xi^\alpha \tag{73}$$

为"算子L的**主符**". 事实上，它是撷取了L的m阶导数项再把所有的D_i改成ξ_i而得出的，它是ξ的多项式.

例如，对拉普拉斯方程来说，主符是 $\sigma_\Delta=-\xi_1^2\cdots-\xi_n^2$. 对波动方程来说，把自变数 t 取为 x_n，其它空间变量取为 $x_1,\cdots,x_{n-1}$，主符是 $\xi_1^2+\cdots+\xi_{n-1}^2-\xi_n^2$（假设 $a=1$）. 热传导方程的主符是 $\xi_1^2+\cdots+\xi_{n-1}^2$，但不包含 ξ_n.

二阶方程的主符关于 ξ 是二次型. 利用这一点，可给出二阶方程的分型定义，我们取 $(x_1,\cdots,x_n)$ 为自变数，则二阶方程

$$Lu=\sum a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum a_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial y}{\partial x_i}+a_0(\boldsymbol{x})u=f \qquad (74)$$

的主符是

$$\sigma_L=\sum a_{ij}(\boldsymbol{x})\xi^i\xi^j. \qquad (75)$$

如果在一点（或一区域中每点）：

(i) σ_L 是正定（或负定），称方程为在该点（或该区域）是**椭圆型**的，其典型是拉普拉斯方程.

(ii) σ_L 特征值的符号是 $(+,\cdots+,-)$ 或 $(-,-,\cdots-,+)$，称方程在该点（或该区域）为**双曲型**的，其典型是波动方程.

(iii) σ_L 有一个特征值为零，其余特征值同号，称方程在该点（或该区域）为**抛物型**的，其典型是热传导方程.

(iv) 如果在一区域中在某些部分方程是双曲型的，又在某些部分方程是椭圆型的，而在其余地方方程是抛物型的，那末这种方程称为**混合型的**. 最典型的例子有特里谷米(F. Tricomi)方程：

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (76)$$

它在上半平面是椭圆型的，下半平面是双曲型的；又如蒲

斯曼(A.Busemann)方程

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(1-y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2x\frac{\partial u}{\partial x}-2y\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{77}$$

它在单位圆内为椭圆型，单位圆外为双曲型．这两个方程在空气动力学中都有重要的应用．

线性方程的一个发展途径，是尽可能地完善二阶方程的各种理论，并将其推广到高阶去．现在分别作些叙述：

1．椭圆型方程

二阶的椭圆型方程的理论，已相当完整．设(73)在具一定光滑性边界的有界区域上是椭圆型的，三种边值问题都已解决．以狄利克雷问题而言，我们考察齐次的边界条件 $u|_{\partial\Omega}=0$ 的特征值问题

$$Lu=\lambda u, \tag{78}$$

其中 λ 是参数，主要的结论是：

(i) 除了一个离散的序列 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots$ 外 (λ_i 称为特征值或固有值)，齐次的狄利克雷问题只有平凡解 $u=0$；当 λ 是特征值时，问题有有限个线性无关的解；

(ii) 若 $Lu=0$ 的齐次狄利克雷问题只有平凡解 $u=0$，那末 $Lu=f$ 的狄利克雷问题有唯一解，若 $Lu=0$ 的齐次狄利克雷问题解不是唯一的，那末存在有限个适当的线性无关的函数 $\varphi_i(x)$，使 $Lu=f$ 有解(解显然不是唯一的)的充要条件是

$$\int_\Omega f(x)\varphi_i(x)dx=0, \tag{79}$$

这结果已推广到高阶方程，甚至高阶方程组．在(71)中，如 $\boldsymbol{u}$ 是 m 元素的列向量，$\boldsymbol{f}$ 也是 m 元素的列向量，$A_\alpha(\boldsymbol{x})$是 $m\times m$ 阵，我们就有一个由 m 个方程构成的，m 个未知函数的方程组．这时，照样可以定义它的**主符**为

$$\sigma_L(\boldsymbol{x},\xi)=\sum_{|\alpha|=p} A_\alpha(\boldsymbol{x})\xi^\alpha. \tag{80}$$

但 $\sigma_L(\boldsymbol{x},\xi)$ 现在已是 $m\times m$ 阵了．如果对一切 $\xi\neq(0,\cdots,0)$，$\sigma_L(\boldsymbol{x},\xi)$是非退化的，方程组就称为**椭圆型的**，对于一般的椭圆型方程组的边值问题，可以提出相当一般性的边界条件，称为**罗巴丁斯基**(Lopatsinski)**条件**[4]．且对于相应的边值，上述结果仍然成立．

也可以在微分流形上研究椭圆型算子．如果流形是紧致无边的，ker$L$ 是$Lu=0$的解所成的线性空间，coker$L$ 是指(79)中 $\varphi_i(x)$的独立的个数．ker L 和 coker L 的维数（都是有限数）dimker L - dimcoker 称为椭圆算子 L 的**指标**(Index L)．阿蒂亚（M. F. Atiyah）和辛格（I. Singer)证明了 Index L是一个拓扑不变量，并能给出它的表达式．

椭圆算子的一个很好的特征，是它的解的解析性和光滑性；若 f 和 $A_\alpha(x)$是解析，那末它的解就是解析的，若 f 和 $A_\alpha(x)$是无限次可微的（记为 C^∞），那末它的解也属于 C^∞．具有后一类性质的偏微分算子，比椭圆型方程要广泛得多，称为**亚椭圆算子**．

2．双曲型方程

当 $a_{ij}\xi^i\xi^j$ 为正定的二次型时，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+a_0 u_0+f \qquad (81)$$

关于(81)的初始值问题和各种初边值问题，解的存在性和唯一性都已获得完整的证明．如(81)右边还包括含涉及 x_n 的二阶导数，问题也可解决，但初始值所在的曲面要有一定的限制，否则 x_n 未必能作为时间参数的类似．

双曲型方程的理论也可以扩充到高阶的情形．对于方程(71)，其主符$\sigma_L(x,\xi)$仍由(73)所定义．如果存在一个非零向量 τ，使

$$\sigma_L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\xi}+\lambda\boldsymbol{\tau})=\mathbf{0} \qquad (82)$$

对所有 ξ，关于 λ 只有实根，那末方程就称为**双曲型的**；若对所有 $\xi\neq\mathbf{0}$，这个方程关于 λ 只有实根且无重根，那末就称它为**狭义双曲型的**．对于常系数的双曲型方程和狭义双曲型方程，初始值问题的适定性是成立的．至于变系数的具重特征的（即λ有重根)的双曲型方程，其初始值问题也有许多研究，情况比较复杂．我们已经知道，对于 m阶偏微分方程，为使具 m个初始值的方程的初始值问题是适定的，那末方程必须是双曲型的．在适当的边值下，也可讨论初边值问题．

同样，也可研究双曲型方程组．其中有一类特别重要又较易处理的一阶方程组，称为**对称双曲组**，它具有形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\sum_i \boldsymbol{A}_i\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}, \qquad (83)$$

式中 $\boldsymbol{A}_i$ 是对称阵，$\boldsymbol{B}$ 是任意阵．数学物理中许多重要

的方程，如麦克斯韦(J. C. Maxwell)方程、狄拉克方程等等，都以它为特殊情形．这种方程组可以有重特征，其初始值问题，初边值问题都已得到很好的解决．但它还未能包括一般的一阶双曲组．

3．抛物型方程

二阶抛物型方程的一般形式是

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Au, \tag{84}$$

其中A是二阶的椭圆型算子，其初始值问题和初边值问题的适定性均已解决．当A是高阶椭圆型算子时，情况已基本弄清．此外，对于高阶的抛物型方程组，也已有许多研究．抛物型方程的一个特点，是它的解当$t\to\infty$时有比较好的收敛性，其极限成为椭圆型方程的解，因而，有时利用抛物型方程来讨论椭圆型方程．

对抛物型方程，还可研究不定边界问题．例如冰的溶化问题．冰和水的传热系数不同，所以在冰和水所占的区域中方程的系数不同，且在(t, x)平面上冰和水的分界线是待定的，在这一分界线上温度为0°C，但溶解时要放热(结冰时则吸热)，形成了两个在未定边界上的条件．对于这类问题，已有很好的研究．其实，对于其他类型的方程，也各有其相应的不定边界问题．如水波的表面，激波的传播等等，难度一般是较高的．

4．混合型方程

特里谷米方程(76)的基本边值问题是对由曲线CA BC所围成的区域中求解．这里A、B两点在x轴上，

AB 是在上半平面上的曲线弧，AC 和 BC 是方程在下半平面的特征曲线，即由

$$dx^2 + ydy^2 = 0 \tag{85}$$

所定义的曲线，边界条件是在 AC 和 AB 上给定函数 u 的数值．这种边值问题称为特里谷米问题，基本上由特里谷米所解决．

蒲斯曼方程可以通过变换，使在单位圆内成为拉普拉斯方程，单位圆外化为波动方程，从而可以求解气体力学中所需要的许多边值问题．

多变数的混合型方程到本世纪 50 年代才开始有人研究，最早解出的边界问题是针对广义的蒲斯曼方程

$$\sum(\delta_{ij} - x_i x_j)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum 2\alpha x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \alpha(\alpha+1)u = f, \tag{86}$$

其中 α 是常数．对这一类方程，可以对包含单位球的闭区域 Ω 求解，但 Ω 的切平面不能和单位球有公共点．事实是：设 f 充分光滑，当 $\alpha > -\frac{n}{2} + \left[\frac{n}{2}\right] + 2$ 时，存在(86)在 Ω 内的唯一的 C^2 解，使满足两个已给的边界条件

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi_0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_1; \tag{87}$$

当 $\alpha < -\frac{n}{2}$ 时，方程只存在唯一 C^2 解，即不能再给任何边界条件．

这些性质到比较一般变系数二阶方程的推广，以及到高阶混合型方程的研究，都还是最近的成果．

在研究混合型方程时，一阶正对称方程组

$$\sum_{i} \boldsymbol{A}_{i} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_{i}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$$

理论是重要的工具，这里 $\boldsymbol{A}_i$ 是对称阵，又要求

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^{*} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{A}_{i}}{\partial x_{i}}$$

是正定阵. 许多二阶双曲型、椭圆型方程的边值问题都可以化成这种方程组，因而这一理论是对古典分型的一个突破.

七、线性偏微分方程的一般理论

一阶线性偏微分方程具有形式

$$Xu = \sum_{i=1}^{n} A_{i} \frac{\partial u}{\partial x_{i}} + Bu = f, \tag{88}$$

其中 A_i、B 均为已知函数. 这种方程事实上属于双曲型方程，可用特征线法解出，即归结为解常微分方程组

$$\frac{dx_{i}}{dt} = A_{i}(\boldsymbol{x}), \quad \frac{du}{dt} + Bu = f. \tag{89}$$

前面 n 个关于 x_i 的方程组的解，称为**特征线**. 设 $A_1 \neq 0$，初始值给在 $x_1 = 0$ 所定义的平面上，那末，过 $x_1 = 0$ 上每一点的特征线是能够唯一地确定的，沿这根特征线的函数 u 的数值是由解最后的一个方程定出.

对于任意阶数的方程组，当所有的系数都是解析函数时，具一定标准形式的方程组的初始值问题解的存在

性可由古典的柯西-柯瓦列夫斯卡娅（C. B. Ковалевская)定理给出．以一阶情形为例，若方程具形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}A^{i}\frac{\partial u}{\partial x^{i}}+Bu+f, \tag{90}$$

式中 A^i、B、f 均为(t,x)的实解析函数，A^i 和 B 是 $m\times m$ 阵，u、f 是 m 列向量．初始条件为

$$u(0,x)=\varphi(x), \tag{91}$$

$\varphi(x)$也是解析函数，那末这个初始值问题一定存在唯一的解析解．人们可首先利用解的幂级数展开而得出它的形式解，然后可以利用某些技巧来证明这幂级数的收敛性，但解的定义区域一般是小范围的．

关于这种方程在C^∞类中(或C^l类中)的解的唯一性问题，在 A^i、B 为解析的情形是成立的(霍尔姆格雷恩(E. Holmgren)定理)．当 A^i、B 只是 C^∞ 函数时，解的唯一性定理只有在一定条件下才能成立．

在现代的偏微分方程理论中，广泛地使用了近代的分析工具，各种各样的泛函空间被引入了，其中主要有

i. 广义函数(又称分布)　定义在 $\mathbf{R}^n$ 中的具紧致支集的 C^∞ 的复值函数的全体记为D.这里，一个函数$\varphi(x)$的支集是指点集$\{x;\varphi(x)\neq 0\}$的闭包．D 中函数序列 $\{\varphi_n\}$ 收敛于 φ 的意义是：存在一个紧集 k，使 φ_n 的支集都在 k 内，而且对一切复合指标 α，$D^\alpha\varphi_n$ 一致收敛于 $D^\alpha\varphi$．所谓**广义函数** f，就是指在 D 上的线性连续泛函，其值用$\langle f,\varphi\rangle$表示．例如，若 f 是可积函数，则它是一个广义函数，由

$$\langle f,\varphi\rangle=\int f(x)\varphi(x)dV_n \tag{92}$$

所定义(有时,我们也把广义函数 f 写成 $f(x)$, 即使它不是可积的函数). 又如 δ 函数也是一个广义函数,由

$$\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0) \tag{93}$$

所定义. 对一个广义函数 f,可以作它的任意阶导数, 其定义是

$$\langle D^\alpha f,\ \varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,\ D^\alpha\varphi\rangle. \tag{94}$$

此外,广义函数和一个 C^∞ 函数 $a(x)$ 的乘积, 也是一个广义函数,其定义为 $\langle af,\varphi\rangle=\langle f,a\varphi\rangle$.从而,一个线性微分算子作用于一个广义函数是有明确意义的, 由此就可以把偏微分方程的解的意义大大地加以扩充, 即把满足方程的广义函数(未必是普通的具有连续的导数的函数)定义作方程的一种广义解. 又, 方程(88)的右端 f 也可以取为广义函数,特别可选为 δ 函数. 那末,$Lu=\delta$ 的解就称为算子 L 的基本解. 例如

$$\Delta u=\delta \tag{95}$$

就有解

$$u=\begin{cases}\dfrac{1}{(2-n)\omega_n}r^{-n+2}, & n>2;\\ -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r}, & n=2.\end{cases} \tag{96}$$

ω_n 是 $\mathbf{R}^n$ 中单位球面的面积.

如 $f(x)$是一个广义函数, 可以定义它的平移, 记为 $f(x-a)$. 它也是一个广义函数,其定义是

$$\langle f(x-a),\ \varphi(x)\rangle=\langle f(x),\ \varphi(x+a)\rangle. \tag{97}$$

如果 $f(x)$是可积函数，这和(92)是一致的.对于 δ 函数，我们有

$$\langle\delta(x-a),\ \varphi(x)\rangle=\varphi(a). \tag{98}$$

此外，还可以定义某些满足一定条件的广义函数的傅里叶变换，以及两个广义函数的卷积，等等. 它们都是研究线性偏微分方程一般理论的有效工具.

ii. 索伯列夫(С. Л. Соболев)空间　设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域，对于 $C^\infty(\Omega)$中的函数 $f(x)$，可以定义它的**索伯列夫范数** $\|f\|_{W_m^p}$：

$$\|f\|_{W_m^p}=\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha f\|_p^p\right\}^{1/p},\quad 1\leqslant p<\infty, \tag{99}$$

式中$\|\ \|_p$是指熟知的 L_p 范数.把函数集 $C^\infty(\Omega)$依此范数完备化，就会得到一个巴拿赫空间，称为**索伯列夫空间**，记为 $W_m^p(\Omega)$. 在$p=2$时，它是希尔伯特(D. Hilbert)空间. 索伯列夫空间 W_m^p 中的元素是Ω上的函数，它的元素有广义函数意义下的到 m 阶为止的偏导数，即

$$\langle D^\alpha f,\ \varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,\ D^\alpha\varphi\rangle,\quad |\alpha|\leqslant m, \tag{100}$$

对一切支集在 Ω 内部的 $C^\infty(\Omega)$中的函数 φ 成立，而且 $D^\alpha f$ 是 L_p 可积的. 此外，设 Ω 是有界区域，边界没有太强的奇性，还成立如下的嵌入定理：如果 $mp>n$，W_{m+j}^p 中的元素在 Ω 具有 j 阶连续导数，即$W_{m+j}^p(\Omega)\subset C^j(\bar{\Omega})$. 事实上，嵌入定理还包括其它的各种结论，此处就不叙述了. 对于一个微分算子，有时也先设法利用泛函分析的定理，先证明属于 W_{m+j}^p 的某种意义下的广义解的存在性，然后再利用嵌入定理，断定它为 $C^j(\bar{\Omega})$中的函数. 如

果 $j \geqslant$ 偏微分算子的阶数，那末就会得出古典意义下的解的存在性.

这两种常用的泛函空间，在偏微分方程理论中经常出现. 事实上，在前一节所叙述的理论中，有许多也是利用泛函方法得出来的.

考察常系数的偏微分方程

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha D^\alpha u = f, \tag{101}$$

式中 A_α 是常数，f 是具紧支集的广义函数，这就是说，对于支集在某一紧集之外的 D 中元素φ，常有$\langle f, \varphi \rangle = 0$. 对于(101)，一个主要的结果是：(101)容有广义函数解. 特别地，当 $f=\delta$ 时，常系数微分算子 L 的基本解作为广义函数是存在的. 这个定理以及一系列讨论基本解的性质的结果，使常系数偏微分算子的理论得到了重大的进展. 这些结果也同样适用于常系数方程组.

一般说来，即使右边项 f 是 C^∞ 函数，它的广义函数解 u 也未必是 C^∞ 的. 例如，对 C^∞ 的

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f \tag{102}$$

的一般解是

$$u = \int f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 + g(x_2, \cdots, x_n),$$

这里 $g(x_2, \cdots, x_n)$ 可以取 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中的任何广义函数，它一般就不会是 C^∞ 的. 前已说过，如果对一切属于 C^∞ 的 f，u 必须属于 C^∞，则算子称为**亚椭圆的**. 常系数偏微分算子为亚椭圆的条件比较清楚，这就是算子 L 的全符

号 $P=\sum_{|\alpha|\leq m}A_\alpha\xi^\alpha$ 有如下性质：$P(\xi+i\eta)=0$ 和 $|\xi+i\eta|\to\infty$ 蕴涵 $|\eta|\to\infty$. 椭圆性条件满足这一性质. 又如热传导算子 $iD_{n+1}-\sum_{i=1}^{n}D_i^2$, 对应的全符号是 $i\xi_{n+1}-\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$, $P(\xi+i\eta)=i(\xi_{n+1}+i\eta\xi_{n+1})-\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+i\eta_i)^2$, 它满足亚椭圆性的条件.

上面已说过，常系数的偏微分方程，在广义函数范围内一定是有解的. 人们曾经设想把这个结果推广到变系数的情形. 然而，汉勒维(H. Lewy)发现了一个有名的反例：他所考察的方程是

$$-iD_1u+D_2u-2(x_1+ix_2)D_3u=f, \tag{103}$$

这里 u 是复值的函数. 如果 f 是解析函数，由柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理，存在解析解. 使人们感到意外是，他证明了对某些函数 $f\in C^\infty$, 在 $\mathbf{R}^3$ 的任意小的非空子集中，这个方程不存在解，即使是广义函数解也不存在. 这就使人们认识到变系数方程和常系数方程的根本差异. 存在一大类变系数的线性偏微分方程，它们形式上属于柯西-柯瓦列夫斯卡娅那种正规的形式，但在任何一个小邻域中，连广义函数类中解也不存在. 也就是说，这种方程不存在局部可解性. 这一结果，引起了关于偏微分算子(对任何右边项 f)的局部可解性的系统研究.

在线性偏微分方程的研究中，傅里叶变换仍然是一个十分重要的工具. 人们可以把微分算子 $P(x,D)$ 写成

$$P(x,D)u=\frac{1}{(2\pi)^n}\int P(x,\xi)\hat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d^n\xi \tag{104}$$

的形式，这里 $\hat{u}(\xi)$是由(11)所定义的 u 的傅里叶变换．这里的 $P(x,\xi)$ 关于 ξ 是多项式．但如把 $P(x,\xi)$ 换成 x、ξ 的适当的函数 $a(x,\xi)$，就会得到线性微分算子的一个实质性的推广，即引进了拟微分算子

$$Au=\frac{1}{(2\pi)^n}\int a(x,\xi)\hat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d^n\xi. \tag{106}$$

当 $a(x,\xi)$为适当的、仅依赖于 ξ 的函数时，Au 称为**奇异积分算子**．(106)式中的函数 $a(x,\xi)$ 称为“拟微分算子 A 的符号”．可以证明，在一定意义下，拟微分算子关于线性运算与复合运算构成代数，它正与符号关于线性运算与某种乘法运算所构成的代数同构．这样，一个偏微分方程的性质，往往可以利用其符号进行研究，或加以表述．前面，我们在讨论偏微分方程的分型时，正是这样做的．在线性偏微分方程的一般理论中，这一思想更为突出，而且发挥了更多的作用．

将偏微分算子 $P(x,D)$ 的主符记为 $p_m(x,\xi)$，若在 (x_0,ξ_0)点 $p_m(x_0,\xi_0)=0$，但 $\nabla_\xi p_m(x_0,\xi_0)\neq 0$，则称算子 $P(x,D)$为**主型算子**．利用拟微分算子作为工具，人们已对主型偏微分方程的局部可解性问题和柯西问题的唯一性作出了较满意的回答．

在构造双曲型方程柯西问题解的表达式时，会遇到形为

$$F(u)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int a(t,x,\xi)\hat{u}(\xi)e^{is(t,x,\xi)}d^n\xi \tag{105}$$

的算子．其中 $s(t,x,\xi)$ 是满足一定条件的 ξ 的齐一次

函数,(105)称为傅里叶积分算子，它是拟微分算子的一个重要的推广. 它可用于建立不同拟微分算子之间的变换关系,本身也有许多很有兴趣的性质,现已成为偏微分方程研究的一个有力的工具.

八、非线性偏微分方程的来源

在许多力学和物理学的问题中，出现的偏微分方程是非线性的. 也就是说，它关于未知函数及其导数不是线性关系. 例如,在热传导的问题中,有时传热系数不是常数,而是温度的函数,那末热传导方程就是

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a(u)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(a(u)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(a(u)\frac{\partial u}{\partial x_3}\right). \tag{107}$$

这是一个非线性的方程. 在讨论热平衡状态时,我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(a(u)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(a(u)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(a(u)\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)=0, \tag{108}$$

它也是非线性的.

在流体力学中，描述粘性气流的方程是纳维(L. M. H. Navier)-斯托克斯(G. G. Stokes)方程，其形式如下

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j}=0,\text{（连续性方程）}$$

$$\frac{du_i}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\sum_j\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},\text{（动量方程）} \tag{109}$$

$$\frac{d}{dt}\left(C_p T+\frac{u^2}{2}\right)=\frac{1}{\rho}\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_j}+\sum_i u_i\tau_{ij}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t},$$

（能量方程）

式中

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial \tau}+\sum u_i\frac{\partial}{\partial x_i},\quad p=R\rho T,$$

$$\tau_{ij}=\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\sum_l\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)+\xi\,\delta_{ij}\sum\frac{\partial u_l}{\partial x_l}.$$

这里 ρ 是流体密度，$u=(u_1,u_2,u_3)$ 是流速，T 是温度，η、ζ 是粘性系数，λ 是传热系数，p 是压强，C_p 是定压比热，R 是气体系数，τ_{ij} 是表示粘滞力的张量.

当流体为不可压缩时，ρ 为常数；又，我们不计温度的变化，那末(109)化为不可压缩流体的纳维-斯托克斯方程

$$\sum\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0,\qquad \frac{du_i}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\eta}{\rho}\Delta u_i. \tag{109'}$$

又，当流体为可压缩，但粘性和热传导可略而不计时，它就化为无粘流体的欧拉方程组

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}=0,\ \frac{du_i}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i},\ \frac{dS}{dt}=0. \tag{109''}$$

式中 S 是比熵. 所有这些情况，方程都不是线性的.

弹性力学的大变形理论，电磁流体力学，爱因斯坦(A. Einstein) 的引力场方程，描述基本粒子相互作用的杨(杨振宁)-米尔斯(R. S. Mills)方程等等，都是非线性方程.

在微分几何中，也出现许多非线性的偏微分方程. 例如，曲面 $z=f(x,y)$ 是极小曲面(这总是指面积积分的第

一变分为 0)的偏微分方程是

$$(1+q^2)r-\partial pqs+(1+p^2)t=0, \tag{110}$$

这里

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

(110)的意义是曲面的平均曲率 $H=0$. 在物理上，张于一闭曲线上的肥皂液所成的膜,必为极小曲面(因存在表面张力,使其面积化为极小).

又,若要求总曲率 k 为已给函数的曲面,问题化为求解蒙日-安倍尔方程

$$rt-s^2=f(x,y,z,p,q) \tag{111}$$

的某些特殊情形.

(107)～(111)都是非线性方程，其中 (109) 是方程组. 但是，(107)～(110)对最高阶的导数来说是线性的(其系数可以依赖于未知函数及其非最高阶的导数)，所以其非线性程度还不算非常高,称为**拟线性的**. (111)的非线性程度比较高,有时也称为**真正非线性的**. 此外,也还有一些方程,如

$$\Delta u=f\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),$$

它们的最高阶导数部分纯粹是线性的，这种方程常常称为**半线性方程**.

在线性偏微分方程的理论中，也会产生非线性偏微分方程. 例如，对于 N 个未知函数的 N 个线性方程所成的方程组

$$Lu=\sum_{|\alpha|\leqslant m}A_\alpha(x)D^\alpha u=f, \tag{112}$$

我们可以定义它的**特征方向**(x, ξ)是在点 x 的法线方向 ξ，它满足

$$\det\left|\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x)\xi^\alpha\right| = \det|\sigma_L(x,\xi)| = 0. \qquad (113)$$

如果一个$(n-1)$维超曲面 S，其法线方向处处为特征方向，那末这个超曲面就称为**特征超曲面**，其意义是：如果在 S 上给定 u 及其到 $m-1$ 阶的导数的数值，由方程本身不能唯一地决定出 m 阶导数的数值．如果我们在一超曲面的两侧方程组(112)有解，且它们的$(m-1)$阶导数沿这超曲面连续，但 m 阶导数有第一类的间断，那末这超曲面称为方程组的**弱间断超曲面**．从上面的定义可见，弱间断超曲面必然是特征超曲面．特征的概念对于偏微分方程是十分重要的、基本的概念．从(113)可见，如果函数 φ 满足非线性偏微分方程

$$\det\left|\sum_\alpha A_\alpha(x)\varphi_{(\alpha)}\right| = 0, \qquad (114)$$

这里 $\varphi_{(\alpha)} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$，那末

$$\varphi = \text{const}$$

就是特征超曲面．特别地，对于波动方程，它的特征超曲面由一阶非线性偏微分方程

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)^2 - a^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 = 0$$

决定．

总之，非线性偏微分方程在物理学，力学，以及数学本身，都有非常重要的作用；但是，它也是非常复杂的对象．

九、求特解方法举例

对于非线性偏微分方程，已经有许多求特解的方法．有时，这种方法是很有效的．下面举一些例子．

i．不可压流体的势流

对于定常的不可压流的欧拉方程，即

$$\sum u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad \sum \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{115}$$

假定存在函数 φ，使得

$$u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \tag{116}$$

这种流体称为**有势流**．这时，φ 必须满足拉普拉斯方程

$$\Delta\varphi = 0. \tag{117}$$

从而(115)的第一套方程就给出

$$p = -\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 + C.\ (\text{其中}\ C\ \text{是常数}) \tag{118}$$

这样，我们就可以利用拉普拉斯方程的解，得出(115)的许多很有用处的特解，它们在流体力学中有很多重要的作用．

ii．极小曲面方程

对于极小曲面方程，可以利用一些特殊的假定，然后能把偏微分方程化为常微分方程来求解，作出它的一些特解．如

1．令 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$，得到 $z=\tan^{-1}\frac{y}{x}$．（螺线面）

2．令 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$，得到 $z=\cosh^{-1}\sqrt{x^2+y^2}$．（悬链面）

3．令 $z=f(x)+g(y)$，得到 $z=\log\frac{\cos y}{\cos x}$．（肖尔克(Sherck)曲面）

此外，极小曲面方程还有很有趣的化为线性方程的方法，据此可得出方程的通解．这方法可以简述如下：假设曲面写成参数表示的形式：

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v). \tag{119}$$

又假设 u、v 是曲面的等温参数，即成立

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,\\ \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}=0.\end{gathered} \tag{120}$$

这种参数的存在，一般是某些椭圆型方程组局部可解性的推论．用几何的方法可知，为使曲面的平均曲率为零，其充要条件是 $x(u,v)$、$y(u,v)$、$z(u,v)$ 都是调和函数，因而它们都可表示为解析函数的实部；再考虑到(120)，就会得到极小曲面的埃耐倍尔(Enneper)–外尔斯特拉斯(K. T. W. Weierstrass)表示：

$$x=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\int f(1-g^2)d\zeta\right\},$$

$$y=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\int f(1+g^2)d\zeta\right\},$$

$$z=\mathrm{Re}\left\{\int fg\,d\zeta\right\},\tag{121}$$

这里 $\zeta=u+iv$，f、g 是 ζ 的解析函数．

iii．能变换成线性方程的非线性方程

有些非线性偏微分方程，能通过一定的变换化成线性方程来求解．这里举出几个例子：

1．对比尔吉斯(J. M. Burgers)方程(在流体力学的简化模型中出现)

$$u_t+uu_x=\lambda u_{xx},\tag{122}$$

令 $u=v_x$ 代入，再关于 x 积分一次，就得到

$$v_t+\frac{1}{2}v_x^2=\lambda v_{xx}.\tag{123}$$

再令

$$v=-2\lambda\ln\psi,\tag{124}$$

就导出了线性的热传导方程

$$\psi_t=\lambda\psi_{xx}.\tag{125}$$

这种变换称为霍普夫(H. Hopf)变换．

2．对微分几何中有重要作用的刘维尔(J. Liouville)方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=e^u,\tag{126}$$

设 u' 是偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x\partial y}=0\tag{127}$$

的解，那末作偏微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u'}{\partial x}-\beta e^{\frac{1}{2}(u+u')},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u'}{\partial y}-\frac{2}{\beta}e^{\frac{1}{2}(u+u')}.\ (\beta=\text{常数}) \tag{128}$$

通过计算可见，u 必定是(126)的解．由于(127)的解总可写成 $u'=f(x)+g(y)$，(128)可以彻底解出．从而得到列维尔方程的通解

$$u=2\ln\left[\frac{\exp(f(x)-g(y))}{\frac{\beta}{2}\int\exp f(x)dx+\frac{1}{\beta}\int\exp(-g(y))dy}\right]. \tag{129}$$

这种变换是后文还要提到的贝克隆特(A. V. Backlund)变换的一个特例．

3．速度图法．以一维气体动力学方程为例，我们假定气体是无粘性的，保持均熵，状态方程为 $p=A\rho^{\gamma}$(其中 A、γ是正常数，$\gamma>1$)，原来的方程是

$$\rho_t+(\rho u)_x=0,$$
$$u_t+uu_x+\frac{1}{\rho}p_x=0. \tag{130}$$

这里，下标表示求导．引入黎曼(G. F. B. Riemann)不变量

$$r=\frac{1}{2}\left(u+\frac{2a}{\gamma-1}\right),\quad s=\frac{1}{2}\left(-u+\frac{2a}{\gamma-1}\right), \tag{131}$$

这里 $a=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}=\sqrt{A\gamma\rho^{\gamma-1}}$ 是音速．可以把(130)化成

$$r_t+(u+a)r_x=0,\quad s_t+(u-a)s_x=0. \tag{132}$$

所谓速度图法，就是作变换，使未知函数(r,s)成为独立变数，独立变数(t,x)成为未知函数．在 $\Delta=t_rx_s-t_sx_r\neq0$

的假定下，我们有

$$r_t=\frac{x_s}{\Delta},\quad r_x=-\frac{t_s}{\Delta},\quad s_t=-\frac{x_r}{\Delta},\quad s_x=\frac{t_r}{\Delta}. \tag{133}$$

这就把(132)化成线性方程组

$$x_s=(u+a)t_s,\quad x_r=(u-a)t_r. \tag{134}$$

由 $u=r-s$、$a=\frac{1}{2}(r-1)(r+s)$，(134)是一个线性的方程组；并且，利用 $x_{sr}=x_{rs}$，我们还可消去 x 而得出

$$t_{rs}+\frac{\mu}{r+s}(t_r+t_s)=0,\quad \left(\text{其中 } \mu=\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) \tag{135}$$

这称为**泊松-欧拉** (L. Euler)-**达布**(J. G. Darboux) **方程**. 特别，当 $\gamma=\frac{2N+1}{2N-1}$(其中 $N=1,2,\cdots$)时，$\mu=N$，方程具有通解形式

$$t(r,s)=k+\frac{\partial^{N-1}}{\partial r^{N-1}}\left[\frac{f(r)}{(r+s)^N}\right]+\frac{\partial^{N-1}}{\partial s^{N-1}}\left[\frac{g(s)}{(r+s)^N}\right], \tag{136}$$

$N=1,2,3$ 相应于 $\gamma=3,\frac{5}{3},\frac{7}{5}$，这些都是气体力学中的重要情形.

4. 勒让德(A. M. Legendre) 变换法. 以两个未知函数时为例：$z=f(x,y)$. 以 $p=z_x$、$q=z_y$ 代替 x、y 为自变数，又以 $\phi=px+qy-z$ 为新的未知函数. 在 $rt-s^2\neq 0$ 的情况下，这种变换是有意义的，这时还成立

$$\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_{pp} & \phi_{pq} \\ \phi_{pq} & \phi_{qq} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

据此，下述形式的二阶拟线性方程

$$A(p,q)r+2B(p,q)s+C(p,q)t=0$$

就可化为线性方程

$$C(p,q)\phi_{pp}-2B(p,q)\phi_{pq}+A(p,q)\phi_{qq}=0.$$

例如，极小曲面方程化为

$$(1+p^2)\phi_{pp}+2pq\phi_{pq}+(1+q^2)\phi_{qq}=0.$$

空气动力学二维定常等熵流的方程

$$(C^2-u^2)\Phi_{xx}-2uv\Phi_{xy}+(C^2-v^2)\Phi_{yy}=0,$$

$$(u=\Phi_x,\quad v=\Phi_y,\quad C\text{ 是 }u,v\text{ 的函数})$$

可以线性化为

$$(C^2-u^2)\phi_{vv}+2uv\phi_{uv}+(C^2-v^2)\phi_{uu}=0,$$

而得到许多应用.

又如，闵可夫斯基(H. Minkowski)空间的极值曲面(由 $H=0$ 定义)方程

$$(1-p^2)t+2pqS+(1-q^2)r=0$$

可以线性化为

$$(1-p^2)\phi_{pp}-2pq\phi_{pq}+(1-q^2)\phi_{qq}=0,$$

它属蒲斯曼方程系列，可以具体地解出.

iv. 对称降维法. 在几何或物理上出现的偏微分方程，时常有某种对称性. 比如说，一个方程有球对称性，我们就可以求仅仅依赖于 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的函数的解，这样就导得了常微分方程(或方程组). 对于广义相对论的方程，利用了球对称性，就得到了舒瓦尔茨西尔德(M. Schwarzschild)解，起了很大作用. 爱因斯坦方程的准确解大多也都是利用群不变的性质(即对称性)作出的.

在物理学、力学中的许多方程，常有时空尺度变换下的不变性，也就是适当的相似变换下的不变性. 这种不

变性已被用来求解许多有意义的问题，发生强爆炸后的球形冲击波的传播就是一个例子.

以上的事项说明，虽然求解非线性偏微分方程难度很大，但人们从针对各种有意义的问题的长期的研究中已经积累了许多求特解(严格解)的方法，求出这种特解，对于解释各种物理现象，进行工程设计以及考验各种计算方法和近似方法是否有效，都有很大的作用. 这些方法的一部分，来自几何的或代数的思想. 微分几何的一些经典研究，到今天仍然是非线性偏微分方程求解方法的源泉，而运用代数方法，还会对偏微分方程的求解带来新的面貌.

应该指出，在解决应用问题时，最重要的还是数值计算.

十、某些一般性的经典研究

在这里，我们简单介绍一下有关非线性方程的一些较为经典的结果. 它们往往归结于求解常微分方程组，或者只是在解析函数领域中有结果. 但所得的解只能是局部的，也就是说只能在一点的附近有效.

1. 一阶方程

考察非线性偏微分方程

$$F(x,y,z,p,q)=0, \tag{137}$$

$(p,q,-1)$ 是代表解的积分曲面的法线方向. (x,y,z,p,q)为满足(137)的点和方向,称为**积分元素**.

作常微分方程

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{d\sigma}=F_p,\quad \frac{dy}{d\sigma}=F_q,\quad \frac{dz}{d\sigma}=pF_p+qF_q,\\&\frac{dp}{d\sigma}=-(pF_z+F_x),\quad \frac{dq}{d\sigma}=-(qF_z+F_y).\end{aligned}\tag{138}$$

容易见到，沿这组方程的积分曲线(以 x、y、z、p、q 为未知函数),F 取常数. 因此,如初始值(x_0,y_0,z_0,p_0,q_0)使 $F=0$，那末沿这条曲线有 $F=0$. 这种曲线在三维空间的解释是：它是一条曲线,并在曲线上每点(x,y,z)都带一曲面方向$(p,q,-1)$,被称为**特征带**,(137)的每一解曲面都由其上的特征带所构成,即曲面由一系曲线构成,沿每一曲线连同此曲线上点 (x,y,z) 解曲面的方向 $(p,q,-1)$就是特征带. 相反地,给一根一般位置的曲线 C: $x=x(t)$、$y=y(t)$、$z=z(t)$,又作出 $p=p(t)$、$q=q(t)$,使满足 $dz=pdx+qdy$ 及(137)式(设由这二式可以定出 $p(t)$、$q(t)$)，若 $x(t),y(t),z(t),p(t)$，$q(t)$ 不是特征带中的元素，那末过 C 的各点以 $x(t)$、$y(t)$、$z(t)$、$p(t)$、$q(t)$为初始条件作特征带，就会得到包含 C 的一个积分曲面,即方程(137)的解曲面.

特别,如方程不含 z,不考虑(138)的第三个方程,就得到哈密顿(W. R. Hamilton)-雅可比方程组

$$\frac{dx}{d\sigma}=F_p,\ \frac{dy}{d\sigma}=F_q,\ \frac{dp}{d\sigma}=-F_x,\ \frac{dq}{d\sigma}=-F_y.\tag{139}$$

又如方程为拟线性的,即方程为

$$A(x,y,z)p+B(x,y,z)q+C(x,y,z)=0. \tag{140}$$

我们可以只考虑(138)的前三个方程，即

$$\frac{dx}{d\sigma}=A,\quad \frac{dy}{d\sigma}=B,\quad \frac{dz}{d\sigma}=-C, \tag{141}$$

从而可以定义特征曲线，而能用特征曲线作出解曲面.

这些论述完全可以推广到 n 个自变数的情形.所以，一个未知函数的单个非线性偏微分方程的局部解理论是完整的，可以归结到常微分方程组的求解问题.

2．超定方程组和完全可积性

一个方程组，如其未知函数的个数少于方程的个数，就称为**超定的**. 最简单的例子是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=A(x,y,z),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=B(x,y,z). \tag{142}$$

如果它们有解，利用$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，还必须成立

$$\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}B-\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}A=0. \tag{143}$$

(143)如果恒等成立，那末就称(142)为**完全可积**. 这时，求解 (142) 的问题就化为求解常微分方程的问题. 我们在 $P_0(x_0,y_0)$点给定 z 的值 z_0，$P(x,y)$是 P_0 的一个邻近点，把 P_0P 用可微分的曲线弧 C (例如直线)：$x=x(t)$，$y=y(t)$联结起来，使 $t=0$ 时为点 P_0，$t=1$ 时为点 P，求解常微分方程

$$\frac{dz}{dt}=A(x(t),y(t),z)\frac{dx}{dt}+B(x(t),y(t),z)\frac{dy}{dt}, \tag{144}$$

就会得到 z 在 P 点的值. 积分可能条件(143) 保证了 z 在 P 点的值和曲线弧 C 选取的无关性.

如果(143)不恒等成立，但能决定 z 为(x,y)的一个函数，这个函数如果能满足(142)，那末它也是(142)的一个解，但这只是很特殊的情况．如果由(143)决定的 z 不能满足(142)，那末(142)就无解，称为矛盾的方程组，它没有解．

完全可积和积分可能条件可以推广到 n 个自变数、m 个未知函数的方程组去：

$$\frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i}=f_{\alpha i}(x,z).\ (i=1,2,\cdots,n;z=1,2,\cdots,m) \tag{145}$$

这时，可积条件化为

$$\frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial x_j}+\sum_\beta\frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial z_\beta}f_{\beta j}-\frac{\partial f_{\alpha j}}{\partial x_i}-\sum_\beta\frac{\partial f_{\alpha j}}{\partial z_\beta}f_{\beta i}=0. \tag{146}$$

当(146)关于 x_i、z_α 都是恒等式时，就称(145)为**完全可积的**，求解的问题可化为常微分方程组的问题．完全可积的方程组在微分几何中非常重要，在现代应用偏微分方程的研究中，特别是后文中将提到的孤立子理论的研究中，也有很大的重要性．

如果(146)不恒等成立，那末可以有两种情形：

(I) (146)本身是无解的．那末，(145)就无解，称为不相容的方程组．

(II) 由(146)定出部分未知函数，例如 $z_{p+1},\cdots,z_m$ 为其它的 $z_1,\cdots,z_p$ 及 $x_1,\cdots,x_n$ 的函数，把它们代到(145)中关于 $\frac{\partial z_\lambda}{\partial x_i}=f_{\lambda i}(x,z)$(其中 $\lambda=p+1,\cdots,m$)中去，又可得一些式子，且有下述情况：

(II_1) 这些式子是恒等式，我们减少了未知函数，但

导得了完全可积的方程组.

(II_2) 这些式子不相容,因而方程组(145)也不相容.

(II_3) 这些式子可以再定出一些未知函数为其它未知函数及独立变数的函数. 可继续依照上述手续进行.

用这种手续,我们可以最终地判定方程组(146)是不相容,还是可以归化为用常微分方程组来求解(完全可积的方程组).

3. 解析领域中的偏微分方程组

对于形为

$$\frac{\partial z_\alpha}{\partial x_n}=f_\alpha\left(x,z,\frac{\partial z}{\partial x_a}\right)\quad(\text{其中 } \alpha=1,2,\cdots,n-1)\qquad(147)$$

的方程组,其中 f_α 是它的变元的解析函数,方程个数和未知函数的个数相同,用柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理,可以证明它的解是存在的,但这种解只能是小范围的.对于高阶的柯瓦列夫斯卡娅正规形式的方程组,也有同样的结果. 至于超定的情形,我们也可以作积分可能条件,又利用类似于上面第七章所说的那些步骤(复杂得多,但已由黎吉尔(C. Riquier)等人制定一个标准的算法)可最后判定方程组是可化为柯瓦列夫斯卡娅正规形式(和完全可积的方程)的,或是矛盾的. 在非矛盾的情况下,就可以断定其局部解的存在性.

嘉当(E. Cartan)和凯勒(E. Köhler) 采取外形式的方式,去处理同一问题,得出更有效的归结方式和判定方式.

因而,原则上说,我们是有办法处理解析函数领域中

的偏微分方程组的，虽然实际做起来可能困难很多．但如果把解析函数改为 C^∞ 函数，我们固然可以照样做以上的归化工作，但对最终归化出的柯瓦列夫斯卡娅正规形式的方程组，在一般情况下局部解是否存在的问题还远未解决，这困难在线性情况就已存在了(见本书第34页)．

十一、二阶非线性偏微分方程

二阶非线性方程的分型理论，已有相当多的成就．先讨论如何区分类型的问题．

一个二阶非线性偏微分方程可以写成

$$\mathscr{F}[u]=F(x,u,u_{x_i},u_{x_ix_j})=0 \tag{148}$$

的形式．对于已给函数 w，令 $u=w+\varepsilon v$，作(148)参考于 w 的变分方程，即

$$\begin{aligned}&\left[\frac{d}{d\varepsilon}\mathscr{F}[w+\varepsilon v]\right]_{\varepsilon=0}\\&=\left[\frac{\partial F}{\partial u}\right]_w v+\sum\left[\frac{\partial F}{\partial u_{x_i}}\right]_w v_{x_i}+\sum\left[\frac{\partial F}{\partial u_{x_ix_j}}\right]_w v_{x_ix_j}=0,\end{aligned} \tag{149}$$

式中 $\left[\frac{\partial F}{\partial u}\right]_w$ 等等表示 $\frac{\partial F}{\partial u}$ 中的 u、u_{x_i}、$u_{x_ix_j}$ 用 w、w_{x_i}、$w_{x_ix_j}$ 代入后的结果．把(149)看成关于 v 的线性方程，非线性方程参考于函数 w 的类型就由其变分方程(149)所决定，也就是

i. 如在某一区域 Ω中，阵$\left(\left[\dfrac{\partial F}{\partial u_{x_ix_j}}\right]_w\right)$为正定或负定，则(148)在 Ω 中参照 w 为椭圆型.

ii. 在 Ω 中，阵$\left(\left[\dfrac{\partial F}{\partial u_{x_ix_j}}\right]_w\right)$的特征值符号为(+，…，+，-)(或(-，…，-，+))，则(148)在 Ω 中参照 w 为双曲型.

iii. 如果参照 w，(149)为混合型，那末称(148)为混合型的.

如果 $w=u$ 是方程(148)的解，那末就称方程关于解 u 是椭圆、双曲、混合等等.

对拟线性方程

$$\sum a_{ij}u_{x_ix_j}=f(x,u,u_{x_i}),\tag{150}$$

式中 a_{ij} 是 x、u、u_{x_i} 的函数，阵$(a_{ij}(x,u,u_{x_i}))$决定方程的类型.

又如蒙日(G. Monge)-安倍(A. M. Ampère)方程

$$rt-s^2=f(x,y),\tag{151}$$

其变分方程为

$$w_{yy}v_{xx}-2w_{xy}v_{xy}+w_{xx}v_{yy}=0,\tag{152}$$

其类型决定于阵$\begin{pmatrix} w_{yy} & -w_{xy} \\ -w_{xy} & w_{xx}\end{pmatrix}$. 特别，若 $f(x,y)>0$，w 是任一解 u，方程关于 u 总是椭圆型的；若$f(x,y)<0$，方程关于任一解是双曲型的；若 $f(x,y)$在 Ω 中变号，那末方程关于任一解是混合型的.

1. 双曲型方程

对于一个非线性双曲型方程(例如参照函数 $w=0$)，

我们可以选出一个类似于时间的变量，可以提出它的柯西问题，已经证明，这种柯西问题的小范围解(即在初始超曲面附近有定义的解)总是存在的，而且也可以考虑某些初边值问题.

对双曲型方程而言，存在的主要问题是求大范围解的存在性问题. 目前对形为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=f(u_{x_i},u_{x_i x_j})$$

的方程，假定 $f(0,0)=0$，又方程参考于 $u=0$ 是双曲型的，那末在 $n\geqslant 5$ 时，初始值相当小时，可以保证解对一切 x_n 存在(当 $|u_{x_i}|,|u_{x_i x_j}|\to 0$ 时，f 是二阶小量时，结果还可改善). 但 $n<5$ 时，已有反例证明：即使初始条件非常小(但不为零)，不存在大范围解. 至于大初始的初始值问题的大范围解的存在性问题，结果还很少.

2. 椭圆型方程

在许多情况下，二阶拟线性的椭圆型方程的狄利克雷问题解的存在性已有详细的研究，方法比较多. 特别是当这二阶方程是某些变分问题

$$J[u]=\int F(x,u,u_{x_i})d^n x$$

的欧拉方程时，若$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_{x_i}\partial u_{x_j}}\right)$总是正定阵，那末这欧拉方程一定是椭圆型的，结果也就更为丰富. 举例来说，三维空间的极小曲面的普拉托(J. Plateau)问题，即给定一条空间闭曲线，作以它们为边界的极小曲面，已得到比较完整的解决. 近年来，极小点和临界点方法发展很快.

在线性和拟线性的椭圆型方程的研究中，需要用到各种函数空间(例如索伯列夫空间)，各种不动点原理(例如勒雷(J. Leray)-肖德尔(J. P. Schauder)不动点原理)和对解的先验估计，即预先假定解存在，只利用方程和边界条件，对解本身或其导数作出估计．这往往需要很高的技巧．近年来，对于求解某些真性非线性椭圆型方程，如有关蒙日-安倍尔方程(自变数可不限于两个，这时方程的形式为 $\det(u_{x_i x_j})=f(x,u,u_{x_i})$，阵 $(u_{x_i x_j})$ 正定)的研究，有了很多的进展．但是，真正非线性方程的研究仍然是很困难的问题．

3．抛物型方程

在一定假设下，二阶拟线性抛物型方程的初始问题和初边值问题的局部解(即对充分小时间 t)的存在性问题是不难证明的．困难在于决定什么时候会有整体解(即对一切 t 有效)的存在，当 $t\to\infty$ 时解的渐近形态如何？又如，解在有限时间内就变为无穷(破裂)，它依何种方式破裂也是令人关心的问题．

4．混合型方程

对线性混合型方程，在可以用速度图或勒让德变换线性化的情况，已有不少结果；但用于边值问题的研究，则仍有困难．对于较为一般的拟线性混合型方程，在相当强的条件下，可以和线性变分方程的边值问题有相同的存在性．近来，对于混合型的蒙日-安倍尔方程解在混合区域的局部可解性的研究也有了进展．但总的来说，关于拟线性和非线性混合型方程的研究，还是刚刚在开

始，问题的难度比单一类型的方程高得多.

有许多非线性的方程组也是大力研究的对象. 例如纳维-斯托克斯方程，对不可压缩的情形，当空间维数是2时，柯西问题的存在性和唯一性已得到好的结论，但空间变数是3时，只能在小范围内证明解的存在性和唯一性，而且是在某种意义下的弱解(带奇性的解). 这种研究牵涉到流体力学中的一个很重大的问题——湍流的产生及其本性的问题.

十二、激波和孤立子波

近年来，偏微分方程理论中已充分重视有间断性的解. 特别是空气动力学中的激波(冲击波)的传播在应用上有很大的重要性. 间断解是方程的解中的一个带有跳跃的曲面，即曲面两侧的气体的速度、压力、密度、熵均发生间断，但仍然使质量守恒，动量守恒，能量守恒，熵不减少等基本物理规律成立.

在一个时间变量、一个空间变量的情况，这种方程组的一般形式是

$$u_t + f(u)_x = 0. \tag{153}$$

这里 $u=(u_1,\cdots,u_m)$, $f(u)=(f_1(u),\cdots, f_m(u))$; $f(u)$ 关于 u 的雅可比阵对每一 u 均有实的不同的特征值. 间断解的一个最简单模型方程是一个未知函数方程

$$u_t+\left(\frac{1}{2}u^2\right)_x=0. \tag{154}$$

设间断曲线为 $x=x(t)$，u 的守恒条件是

$$(u_+-u_-)\frac{dx}{dt}+\left(\frac{1}{2}u_+^2-\frac{1}{2}u_-^2\right)=0. \tag{155}$$

熵不减少的条件是 $u_->u_+$. 这里 u_- 和 u_+ 是 u 的左侧极限值和右侧极限值. 一个典型的间断解是

$$u=\begin{cases}1, & 当\ x<\frac{t}{2}时;\\ 0, & 当\ x>\frac{t}{2}时.\end{cases} \tag{156}$$

在一个自变数情形下，对于一大类方程组(包括理想流体方程组)间断解如何形成，如何发展，两个间断解如何相互作用，等等，都已有相当清楚的研究. 但是，即使对理想流体方程组，解的唯一性问题虽已有相当多的研究成果，但尚未完全. 在空间维数大于 1 时，情况更为复杂，近年来已开始成为重要的研究对象.

(153)的解，是传播形式的解，是一种非线性波，给定初始条件(即使很光滑)，在传播过程中波形要发生畸变，终于导致激波的产生. 但对于下述方程

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0, \tag{157}$$

却有完全不同的性质. 这个方程称为柯脱维克 (Kortweg)-德伏莱斯(de Vries)方程或 KdV 方程，是浅水运河表面的长波运动的近似方程. 这种方程有行波式的解：

$$u=\beta\operatorname{sech}^2\left[\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(x-2\beta t)\right]. \ (\beta>0) \tag{158}$$

它在传播中波形不变，u 基本集中在 $x-2\beta t=0$ 的周围，

波幅大的波速也快．人们已经证明：存在一些解表示形为两个(158)式的波的相互作用，开始时波速快的波在后面，波速慢的波在前面，后来被赶上了，经过相互作用后，过一段时间后又分开为原来形式的两个波，波速快的走在前面了．这种相互作用受干扰后仍恢复原状运动的现象引起人们很大的兴趣，称这种波为**孤立子波**；并且发现，许多物理问题中都有这一类现象．容有这种孤立子波的方程也有很多．其研究方法也很有启发性，它和一维的薛定锷方程(线性的)

$$\psi_{xx}+u\psi=\lambda\psi$$

有特别密切的联系，当 u 是 KdV 方程的解时，特征值λ是不因时间而变的，由此发展了一种求解这些方程的“反散射变换法”，它可以说是傅里叶变换法的一种非线性的推广．另外，也还有一种利用已知解求新解的方法，称为**贝克隆特变换**，也吸引着人们的注意．目前，特别引人注目的是多个空间变量的孤立子理论的探索．

综观以上的概要介绍，我们可以指出，偏微分方程是一个很有作用的研究对象，它可以说是数学和各门科学、技术之间的一座重要的桥梁，它的许多研究有着很实际的来源，在结果的预测或方法的运用上也从中受到很多启发，对数学发展也产生了极其重大的影响．为此，只需举出解决热传导问题的傅里叶方法导致了数学的各个领域都起重大作用的傅里叶分析就足以说明问题了．自然，例子还可举出很多．另一方面，也可见到，偏微分方程也

是一个非常复杂和困难的对象. 从一般理论的角度来看，我们还只知道小小的一个角落. 就是在这个角落中，数学上许多复杂的工具(如经典分析和泛函分析，几何，拓扑，代数，概率论)都用上了. 所以，它不断地要求我们去进一步探索，去进一步运用和创造新的数学工具和方法.

在我国，从五十年代起，逐步开展了对偏微分方程的研究形成了一支数量较大的队伍，进行了多方面的研究，例如，对双曲守恒律和间断解，混合型方程，各种类型方程的自由边界问题，非线性椭圆型和抛物型方程的定解问题，孤立子理论，以及微局部分析等等都有了系统的、深入的研究，有相当多的成果，处在国际研究的前列.

参 考 书 目

[1] 谷超豪等，《数学物理方程》，1979 年第 1 版，人民教育出版社.

[2] R.Courant & D.Hilbert, Methals of mathematical physics vol. II. (1962), Interscience Pub. 熊振翔等译，(1977)科学出版社.

[3] F. John, Partial differential equations. Fourth Edition (1982) Springer-Verlag.

[4] M. Schechter, Modern methods in partial differential equations (1977) Mc GRAW-HILL Inc. 叶其孝译，(1983)科学出版社.

[5] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, vol. 1-3. Springer-Verlag 1983.